Architecture des ordinateur

Cours 1 - Système de numération et arithmétique binaire

H. Djerroud

LIASD - Université Paris 8

Janvier 2018

Introduction

Pour manipuler, afficher ou transmettre des nombres en utilisant des circuits électronique, il est nécessaire de représenter chaque symbole par un état différent du circuit.

- Il faut un circuit à dix états pour représenter les symboles de la base dix, de 0 à 9

Problème :

- Il est difficile est excessivement chère de fabriquer des circuit à dix états

Implication :

- Il faut chercher à utiliser un système de numération avec peu de symboles

Pourquoi on compte jusqu'à 10 ?

- Deux mains, dix doigts

Les symboles de la base 10

- Symboles de la base 10 $= \underbrace{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}_{\text{10 symboles}}$

Exemple :

0	10	.	90	100	1000
1	11	.	91	101	1001
2	12	.	92	102	1002
3	13	.	93	...	...
4	14		94	199	
5	15		95	200	
6	16		96	...	
7	17		97	999	
8	18		98		
9	19		99		

Conversion en base 10

Exemple :

$$(6813)_{10} = 6 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$

Formule :

$$(nombre)_{10} = \sum_{i=0}^{n} a_i \times b^i$$

- La formule permet de convertir un nombre de n'importe quelle base en base dix

Base Binaire

La plus petite base

En informatique le nombre binaire s'écrit : b101010 (le nombre commence par b)

Les symboles de la base binaire Base 2

- Symboles de la base binaire 2 = $\underbrace{0, 1}_{2 \text{ symboles}}$

Exemple :

0	1001
1	1010
10	1011
11	1100
100	1101
101	1110
100	...
111	

Octet

- Un octet est formé de 8 bits
- Le bit le plus à droite est appelé bit du poids faible
- Le bit le plus à gauche est appelé bit du poids fort
- L'octet est représenté avec le signe Ø

poids fort $1_7 0_6 1_5 0_4 0_3 1_2 1_1 1_0$ poids faible

Conversion de la base binaire en base 10

Exemple :

$$(1011)_2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

Formule :

$$(nombre)_{10} = \sum_{i=0}^{n} a_i \times b^i$$

$$(1011)_2 = (11)_{10}$$

Conversion de la base binaire en base 10

Exercice :

Exprimer en base décimale les nombres binaires suivants :

- $(1100)_2 = (?)_{10}$
- $(10101010)_2 = (?)_{10}$
- $(1010101)_2 = (?)_{10}$
- $(1111111)_2 = (?)_{10}$
- $(110011001100)_2 = (?)_{10}$

Base Octale

En informatique le nombre octal s'écrit : 04532 (le nombre commence par O (zero))

Les symboles de la base Octale ou Base 8

- Symboles de la base Octale (8) $= \underbrace{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}_{8 \text{ symboles}}$

Exemple :

0	11
1	12
2	13
3	14
4	15
5	16
6	17
7	20
10	...

Conversion de la base Octale en base 10

Exemple :

$$(04752)_2 = 4 \times 8^3 + 7 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 2 \times 8^0$$

Formule :

$$(nombre)_{10} = \sum_{i=0}^{n} a_i \times b^i$$

$$(04752)_8 = (?)_{10}$$

Conversion de la base Octale en base 10

Exercice :

Exprimer en base décimale les nombres octaux suivants :

- $(02457)_8 = (?)_{10}$
- $(0421561)_8 = (?)_{10}$
- $(0101010)_8 = (?)_{10}$
- $(0441243)_8 = (?)_{10}$
- $(010011001100)_8 = (?)_{10}$

Base Hexadécimale

En informatique le nombre Hexadécimal s'écrit : 0x8A5F3 (le nombre commence par Ox (zero x))

Les symboles de la base Hexadécimale ou Base 16

- Symboles de la base Hexadécimale (16) $= \underbrace{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}_{16 \text{ symboles}}$

Exemple :

0	E
...	F
10	10
A	11
B	...
C	
D	

Conversion de la base Hexadécimale en base 10

Exemple :

$$(0x1D5B)_{16} = 1 \times 16^3 + 13 \times 16^2 + 5 \times 16^1 + 11 \times 16^0$$

Formule :

$$(nombre)_{16} = \sum_{i=0}^{n} a_i \times b^i$$

$$(0x1D5B)_{16} = (?)_{10}$$

Conversion de la base Hexadécimale en base 10

Exercice :

Exprimer en base décimale les nombres Hexadécimaux suivants :

- $(0xABCD)_{16} = (?)_{10}$
- $(0x12345)_{16} = (?)_{10}$
- $(0x1BD4FC3)_{16} = (?)_{10}$
- $(0xCCCCCC)_{16} = (?)_{10}$
- $(0xDFA34CDFFF)_{16} = (?)_{10}$

Conversion entre bases

Nous allons utiliser une méthode simple et rapide pour résoudre les problème de conversion. Supposons que nous voulons convertir en base b un nombre N donnée en base a. La méthode consiste à utiliser une succession de divisions en base a où $N_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ représente le quotient de la division, b le diviseur et $R_j(j = 0, 2, \cdots, n)$ le reste de la division.

Conversion entre bases

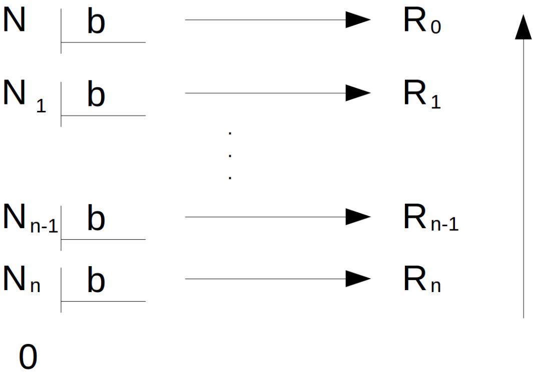

FIGURE – Conversion

Base Décimale à la base Binaire

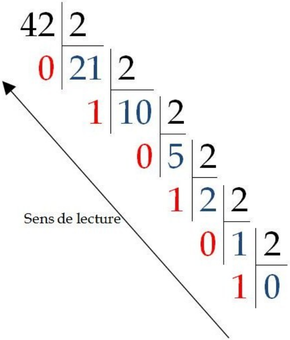

FIGURE – Conversion binaire

Conversion autres bases

- Conversion Octale à la base décimale
- conversion Hexadécimale à la base décimale

Addition

$$\begin{array}{rrr} & & 0 \\ + & & 0 \\ \hline & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} & & 1 \\ + & & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr} & & 0 \\ + & & 1 \\ \hline & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} & & 1 \\ + & & 1 \\ \hline & 1 & 0 \end{array}$$

Addition binaire

Exemple : Additionner les deux nombres binaire :

$11101101 + 10111001 = ?$

		1	1	1	1			1		
		1	1	1	0	1	1	0	1	(237)
+		1	0	1	1	1	0	0	1	(185)
	1	1	0	1	0	0	1	1	0	(422)

Exercice

Exercice : Additionner les deux nombres binaire suivants :

- $10101010 + 10101010$
- $11111111 + 10000000$
- $11111111 + 00111111$
- $01111111 + 01111111$

Soustraction binaire

La soustraction en binaire est faite de la même manière qu'en base décimale. En additionnant un nombre positif à un nombre négatif ; le nombre dont la valeur absolue est plus petite est soustrait du nombre dont la valeur absolue est plus grande et le signe de plus grand nombre est affecté au résultat.

Soustraction binaire

Exemple : Soustraire les deux nombres binaire :

$11001010 + 10101001 = ?$

	1	1	0	0	1	0	1	0	(202)
-	1	0	1	0	1	0	0	1	(169)
	0	0	1	0	0	0	0	1	(33)

Problème des nombres négatifs

- Si l'ordinateur propose de mettre un bit pour distinguer les nombres positif et négatif alors le nombre Zéro 0 aura deux représentation -0 et $+0$
- Un ordinateur ne distingue pas entre une addition et une soustraction. Ainsi, le circuit utilisé pour l'opération d'addition peut être utilisé pour l'opération de soustraction grâce au complément à 2.

Complément à 2

Complément à 2

$$Complment2(N) = Complment1(N) + 1$$

Complément à 1

$$Complment1(N) = C(N)$$

Complément à 2

Exemple :

Trouver le complément à 2 de : $N = 10101001$

C1 :

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
\sim & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

C2 :

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
+ & & & & & & & & 1 \\
\hline
 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

Exercice complément à 2

Exercice : Effectuer les opérations suivantes en binaire :

- $125 - 135$
- $0x542 - 25$
- $b10100101 + 0001111$
- $054 - 0154$

Décimal codé en binaire

Code Gray ou code miroir

Code 7-Segments

Code ASCII

man ascii